Resolução comentada Lista 05

01. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -4+6=2$

02. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \\ -1 & 3 \end{matrix} = 0+2+36-0+12+16=66$

03. Aplicando o teorema de Laplace na 2° coluna temos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{12}\cdot cof\left(a_{12}\right)+a_{22}\cdot cof\left(a_{22}\right)+a_{32}\cdot cof\left(a_{32}\right)+a_{42}\cdot cof\left(a_{42}\right)$$

$$=3\cdot cof\left(a_{12}\right)+0\cdot cof\left(a_{22}\right)+0\cdot cof\left(a_{32}\right)+0\cdot cof\left(a_{42}\right)$$

$$=3\cdot cof\left(a_{12}\right)+0+0+0$$

$$=3\cdot cof\left(a_{12}\right)$$

$$=3\cdot\left(-1\right)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=3\cdot\left(-1\right)\cdot 0$$

$$=0$$

04. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0-2\cdot 3 & -2-2\cdot 2 & 0-2\cdot(-3) \\ 0-1\cdot 3 & 1-1\cdot 2 & 4-1\cdot(-3) \\ 0-(-1)\cdot 3 & 1-(-1)\cdot 2 & 0-(-1)\cdot(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -6 & 6 \\ -3 & -1 & 7 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$, pois a 1° e 3° linhas são proporcionais.

05. Note a matriz triangular onde seu determinante é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

06. Note a matriz de Vandermond:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = (2-1)\cdot(3-1)\cdot(3-2)\cdot(4-1)\cdot(4-2)\cdot(4-3) = 12$$

07. Pelo teorema de Binet temos

$$\det(A\cdot B) = 15$$
$$\det A\cdot\det B = 15$$
$$6\cdot\det B = 15$$
$$\det B = \frac{15}{6}$$
$$\det B = 2,5$$

08. $\det(2\cdot A) = 2^4\cdot\det A = 16\cdot 5 = 80$.

09.

$$A^2 - 3A = 0$$
$$A^2 = 3A$$
$$\det(A^2) = \det(3A)$$
$$(\det A)^2 = 3^4\cdot\det A$$
$$(\det A)^2 = 81\cdot\det A$$
$$(\det A)^2 - 81\cdot\det A = 0$$
$$\det A\cdot(\det A - 81) = 0$$
$$\det A = 0 \text{ ou } \det A - 81 = 0$$
$$\det A = 0 \text{ ou } \det A = 81$$

Como $\det A \neq 0$, resta que $\det A = 81$.

10. Temos que $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & x & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 4 & x \end{matrix} = 7 - 8 + 6x - 12 - x + 28 = 5x + 15$. Uma matriz é invertível se, e somente se, seu determinante é diferente de zero:

$$\det A \neq 0$$
$$5x + 15 \neq 0$$
$$x \neq -3$$

Resolução comentada Lista 06

01.

x: n° de pessoas que pagaram inteira

y: n° de pessoas que pagaram meia

$\begin{cases} x + y = 100 \\ 8x + 4y = 620 \end{cases}$, donde $x = 55$ e $y = 45$.

45 estudantes.

02.

x: quantia, em reais, do Nicolau

y: quantia, em reais, do Eurico

Na primeira situação, Nicolau fica com $x-40$ e Eurico com $y+40$, sendo $y+40=2(x-40)$. Na segunda situação, Nicolau fica com $x+10$ e Eurico com $y-10$, sendo $x+10=2(y-10)$. Do sistema temos que $x=90$ e $y=60$.

03.

x: n° de moedas de 10 centavos

y: n° de moedas de 50 centavos

$\begin{cases} x+y=23 \\ 10x+50y=590 \end{cases}$, donde $x=14$ e $y=9$.

14 moedas de 10 centavos e 9 moedas de 50 centavos.

04.

x: n° de cestas de 2 pontos

y: n° de cestas de 3 pontos

$\begin{cases} x+y=40 \\ 2x+3y=98 \end{cases}$, donde $x=22$ e $y=18$.

Fez 18 cestas de 3 pontos.

05.

x: n° de bolas vermelhas

y: n° de bolas pretas

Na primeira situação temos que $x=3y$. Na segunda situação temos que $y-2=x-26$. Do sistema temos que $x=36$ e $y=12$. Portanto, tem-se 36 vermelhas.

06.

x: n° de acertos

y: n° de erros

$\begin{cases} x+y=36 \\ 5x-2y=110 \end{cases}$, donde $x=26$ e $y=10$.

Resposta: Fez 26 arremessos certos.

07.

Se x e y são os números com $x>y$, por exemplo.

$\begin{cases} x+y=110 \\ x=3y+18 \end{cases}$, donde $x=87$ e $y=23$.

08.

x: comprimento do retângulo

y: largura do retângulo

$\begin{cases} 2x+2y=128 \\ x=y+20 \end{cases}$, donde $x=42$ e $y=22$.

O retângulo tem 42 m de comprimento, 22 m de largura e 42.22=924 m² de área.

09.

x: n° de cavalos

y: n° de galinhas

$\begin{cases} x+y=97 \\ 4x+2y=254 \end{cases}$, donde $x=30$ e $y=67$.

10.

x: n° de meninas

y: n° de meninos

$\begin{cases} 2x+3y=73 \\ 3x+2y=77 \end{cases}$, donde $x=17$ e $y=13$.